©2005. **В.Н. Павленко, Е.А. Чиж**

СИЛЬНО РЕЗОНАНСНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

Рассматривается задача Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывной по фазовой переменной нелинейностью в резонансном случае, причем нелинейность может не удовлетворять условию Ландесмана-Лазера. С помощью теории топологической степени устанавливается существование полуправильного решения рассматриваемой задачи

Введение.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с границей Γ класса $C^{2,\mu}, 0<\mu<1$, $Au(x) \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)u(x)$–равномерно эллиптический дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$ с коэффициентами $a_{ij} \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, $a_0 \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \geq 0$ на $\overline{\Omega}$.

Рассматривается задача

$$Au(x) - f(x,u(x)) = h(x),\ x \in \Omega \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{2}$$

где $f(x,\xi) = \lambda_1\xi - g(x,\xi)$ для любых $x \in \Omega$ и $\xi \in \mathbb{R}$, λ_1– наименьшее собственное значение оператора A с граничным условием (2), $h \in L^q(\Omega)$, $q > m$. Нелинейность $g(x,\xi)$ удовлетворяет условию $(\star)$:

(i) $g : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ борелева (mod 0) [1], т.е. существует борелева функция $\tilde{g} : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, которая отличается от g лишь на подмножестве $l \subset \Omega \times \mathbb{R}$, проекция которого на Ω имеет меру нуль.

(ii) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ имеет разрывы только первого рода, $g(x,\xi) \in [g_-(x,\xi), g_+(x,\xi)]$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$, где

$$g_-(x,\xi) = \liminf_{\eta\to\xi} g(x,\eta), \quad g_+(x,\xi) = \limsup_{\eta\to\xi} g(x,\eta).$$

(iii) (подлинейный рост по ξ) существуют константа $C_1 > 0$ и функция $C_2 \in L^q(\Omega)$ $(q > m)$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ и любого $\xi \in \mathbb{R}$

$$|g(x,\xi)| \leq C_1|\xi| + C_2(x). \tag{3}$$

Замечание 1. *Известно [2], что подпространство решений задачи*

$$Au(x) = \lambda_1 u(x),\ x \in \Omega \tag{4}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{5}$$

одномерно, причем, любое ненулевое решение φ этой задачи либо положительно в Ω и $\partial\varphi/\partial n|_\Gamma < 0$, где $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к границе Γ, либо оно отрицательно и $\partial\varphi/\partial n|_\Gamma > 0$. Для определенности будем везде далее обозначать через φ

положительную функцию, удовлетворяющую (4)–(5) с нормой $\|\varphi\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1$. *Положим* $Lu = Au - \lambda_1 u$, *а через* $Ker(L)$ *обозначим пространство решений задачи (4)–(5).*

Задача (1)–(2) называется нерезонансной, если:

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \inf \frac{f(x,\xi)}{\xi} \neq \lambda_k, \tag{6}$$

и

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \sup \frac{f(x,\xi)}{\xi} \neq \lambda_{k+1}, \tag{7}$$

на множестве ненулевой меры, где λ_k и λ_{k+1} два произвольных последовательных собственных значения оператора A с граничным условием (2), ($\lambda_k < \lambda_{k+1}$). В этом случае обычно устанавливается разрешимость рассматриваемой задачи для любой правой части $h \in L^q(\Omega)$. Изучению задачи (1)–(2) в нерезонансном случае посвящено большое число работ (см., например, [3]–[6] и библиографию там).

Если же (6) или (7) не выполняется ни на каком подмножестве ненулевой меры, то говорят о резонансе около соответствующего собственного значения.

Систематическое исследование резонансных краевых задач эллиптического типа началось с работы [7] Ландесмана Е. и Лазера А. в 1970 г. В этой статье был рассмотрен резонанс около собственного значения λ и предполагалось, что подпространство собственных функций, соответствующих λ, одномерно, нелинейность $f(x,\xi)$ в уравнении (1) тождественно на Ω равна $\lambda\xi + g(\xi)$, а g непрерывна, ограничена на $\mathbb{R}$ и существуют $\lim_{\xi\to\pm\infty} g(\xi) = g(\pm\infty)$. При таких допущениях было показано, что задача (1)–(2) имеет решение, если h удовлетворяет неравенству

$$g(-\infty)\int_{\psi>0}|\psi(x)|dx - g(+\infty)\int_{\psi<0}|\psi(x)|dx < \int_\Omega h(x)\psi(x)dx <$$

$$< g(+\infty)\int_{\psi>0}|\psi(x)|dx - g(-\infty)\int_{\psi<0}|\psi(x)|dx, \tag{8}$$

где ψ– собственная функция, соответствующая λ. Кроме того, если $g(-\infty) < g(\xi) < g(+\infty)$ для любых $\xi \in \mathbb{R}$, то условие Ландесмана–Лазера (8) является также и необходимым для существования решения исследуемой задачи.

В дальнейшем появилось большое число статей по этой тематике, в которых авторы накладывали на нелинейность, входящую в уравнение, условия типа Ландесмана–Лазера. Укажем на работы H. Berestycki, D.G. de Figueiredo [3], J.-P. Gossez, P. Omari [6] (резонанс около λ_1) и R. Iannacci, M.N. Nkashama [8] (резонанс около произвольного собственного значения λ_k), где рассматриваются задачи с непрерывными по ξ нелинейностями и приводится библиография основных работ в этом направлении. Для задач с разрывными по фазовой переменной нелинейностями наиболее общие результаты были получены Basile N., Mininni M. [9], Massabo I. [10], Chang K.C. [11] и Павленко В.Н., Винокуром В.В. [12],[13].

Значительный интерес представляют резонансные краевые задачи эллиптического типа, для которых условия Ландесмана–Лазера могут не выполняться. Такие задачи рассматривались, например, Iannacci R., Nkashama M.N., Ward J.R. в [14] и J.-P. Gossez, P. Omari [6] для уравнений с каратеодориевой нелинейностью и другими авторами.

Отметим, что в [14] исследуется резонанс справа от λ_1 и доказывается существование решения задачи (1)–(2) в предположении, что для почти всех $x \in \Omega$ и для любого $\xi \in R$

$$g(x,\xi)\xi \leq 0 \tag{9}$$

и функция $h(x)$ ортогональна $Ker(L)$ в $L^2(\Omega)$.

В данной работе получены новые условия разрешимости задачи (1)–(2) обобщающие результаты из [14]. Основное отличие заключается в том, что (9) и условие ортогональности заменены здесь более слабыми ограничениями (gh2) (см. далее). Кроме того, дополнительно исследуется резонанс слева от λ_1, а нелинейность может иметь разрывы первого рода по фазовой переменной.

1. Основные понятия и формулировка результатов.

Данная статья посвящена исследованию существования решения задачи (1)–(2) в двух случаях:

1. (резонанс слева от λ_1) предполагается, что почти всюду на Ω

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \sup \frac{f(x,\xi)}{\xi} \leq \lambda_1 \tag{10}$$

2. (резонанс справа от λ_1) когда почти всюду на Ω

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \inf \frac{f(x,\xi)}{\xi} \geq \lambda_1 \quad \text{и} \tag{11}$$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \sup \frac{f(x,\xi)}{\xi} \lneqq \lambda_2 \tag{12}$$

Замечание 2. *Поскольку $f(x,\xi) = \lambda_1\xi - g(x,\xi)$, то неравенство (10) влечет, что почти всюду на Ω*

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \inf \frac{g(x,\xi)}{\xi} \geq 0, \tag{13}$$

а неравенство (11), что для почти всех $x \in \Omega$

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \sup \frac{g(x,\xi)}{\xi} \leq 0. \tag{14}$$

Замечание 3. *Из (iii) следует, что почти всюду в Ω*

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \sup \frac{g(x,\xi)}{\xi} \leq C_1,$$

$$\left(\lim_{\xi\to\pm\infty} \inf \frac{g(x,\xi)}{\xi} \geq -C_1.\right)$$

Действительно, $g(x,\xi) \leq C_1|\xi| + |C_2(x)|$; $g(x,\xi) \geq -C_1|\xi| - |C_2(x)|$. Если $\xi > 0$, то $g(x,\xi)/\xi \leq C_1 + |C_2(x)|/\xi$ и, следовательно,

$$\lim_{\xi\to+\infty} \sup \frac{g(x,\xi)}{\xi} \leq C_1.$$

Если $\xi < 0$, то $g(x,\xi)/\xi \le C_1 - |C_2(x)|/\xi$ и, следовательно,

$$\lim_{\xi \to -\infty} \sup \frac{g(x,\xi)}{\xi} \le C_1.$$

Второе неравенство устанавливается аналогично.

Обозначим $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < r_1\}$, а $\Omega_2 = (\Omega \setminus \Omega_1)$, где r_1 – некоторое положительное число, а $d(x,\partial\Omega)$– расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^m$.

Определение 1. *Будем говорить, что для нелинейности g и функции h в уравнении (1) выполнено условие* (gh1), *если существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 \ge 0$ такие, что верно неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_1} \sup_{\xi<0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \sup_{\xi<-r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \le$$

$$\le \int_{\Omega} h(x)\varphi(x)dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$– положительная собственная функция из замечания 1.

Определение 2. *Будем говорить, что для нелинейности g и функции h в уравнении (1) выполнено условие (gh2), если существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 \ge 0$ такие, что верно неравенство*

$$\int\limits_{\Omega_1} \sup_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \sup_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \le$$

$$\le \int_{\Omega} h(x)\varphi(x)dx \le$$

$$\le \int\limits_{\Omega_1} \inf_{\xi<0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \inf_{\xi<-r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx,$$

где $\varphi(x)$– положительная собственная функция из замечания 1.

Определение 3. *Обобщенным решением задачи* (1)–(2) *будем называть функцию $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$, удовлетворяющую для почти всех $x \in \Omega$ включению*

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

Определение 4. *Функция $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ называется сильным решением задачи (1)–(2), если $u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ удовлетворяет уравнению (1).*

Определение 5. *Сильное решение задачи (1)–(2) называется полуправильным, если для почти всех $x \in \Omega$ значения $u(x)$ являются точками непрерывности сечения $g(x,\cdot)$.*

Определение 6. *Говорят, что нелинейность $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в уравнении (1) удовлетворяет сильному (A)–условию, если существует не более чем счетное семейство* *поверхностей* $\{S_i,\ i \in I\}$, $S_i = \{(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \xi = \psi_i(x)\}$, $\psi_i \in W^2_{1,loc}(\Omega)$ *таких, что для почти всех* $x \in \Omega$ *неравенство* $g_+(x,\xi) \neq g_-(x,\xi)$ *влечет существование* $i \in I$, *для которого* $(x,\xi) \in S_i$ *и*

$$\Big(L\psi_i(x) + g_-(x,\psi_i(x)) - h(x)\Big)\Big(L\psi_i(x) + g_+(x,\psi_i(x)) - h(x)\Big) > 0,$$

где $Lu = Au - \lambda_1 u$.

Теорема 1. *(резонанс слева от* λ_1*) Предположим, что*

1. *функция* $g(x,\xi)$ *удовлетворяет условию* $(\star)$;

2. *почти всюду на* Ω

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \inf \frac{g(x,\xi)}{\xi} \geq 0;$$

3. *для функций* g *и* $h \in L^q(\Omega)$ $(q > m)$ *выполнено условие (gh1).*

Тогда задача (1)–(2) имеет обобщенное решение из $W^2_q(\Omega)$. *Это решение является полуправильным, если дополнительно для уравнения (1) выполнено сильное (A)–условие.*

Теорема 2. *(резонанс справа от* λ_1*) Предположим, что*

1. *функция* $g(x,\xi)$ *удовлетворяет условию* $(\star)$ *и почти всюду на* Ω

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \sup \frac{g(x,\xi)}{\xi} \leq 0;$$

2. *(нерезонансное условие для* λ_2*) существуют измеримые и неотрицательные п.в. в* Ω *функции* Γ_+ , Γ_- *такие, что* $\Gamma_\pm(x) \leq \alpha = \lambda_2 - \lambda_1$,

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} \inf \frac{g(x,\xi)}{\xi} \geq -\Gamma_\pm(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$ *и*

$$\int\limits_{w>0} (\alpha - \Gamma_+(x))w^2(x)dx + \int\limits_{w<0} (\alpha - \Gamma_-(x))w^2(x)dx > 0,$$

для любой собственной функции $w(x)$ *оператора* A *с граничным условием (2), соответствующая второму собственному значению* λ_2.

3. *для функций* g *и* $h \in L^q(\Omega)$ $(q > m)$ *выполнено условие (gh2).*

Тогда задача (1)–(2) имеет обобщенное решение из $W^2_q(\Omega)$. *Это решение является полуправильным, если дополнительно для уравнения (1) выполнено сильное (A)–условие.*

Замечание 4. *Если выполнено условие 1) теоремы 2, то условие 2) будет выполняться, если константа* C_1 *в условии (iii) меньше* $\alpha = \lambda_2 - \lambda_1$ *(в качестве* $\Gamma_\pm(x)$ *следует взять константу* C_1*).*

2. Операторная постановка задачи (1)–(2).

Выберем $\nu \in \mathbb{R}$ так, что $(\lambda_1 + \nu)$ не принадлежит спектру оператора A с граничным условием (2). Пусть $B_\nu : D(B_\nu) \subset C^1(\overline{\Omega}) \to L^q(\Omega)$ $(q > m)$ замкнутый линейный оператор с областью определения $D(B_\nu) = W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, определяемый равенством

$$B_\nu = Au(x) - (\lambda_1 + \nu)u(x), \quad \forall u \in D(B_\nu).$$

Далее, $G : C^1(\overline{\Omega}) \to L^q(\Omega)$– оператор Немыцкого, порождаемый нелинейностью $g(x,\xi)$ $\Big($т.е. $Gu = g(x, u(x)),\ \forall u \in C^1(\overline{\Omega})\Big)$, а $SG : C^1(\overline{\Omega}) \to 2^{L^q(\Omega)}$ – секвенциальное замыкание G [15] (по определению для $u \in C^1(\overline{\Omega})$ значение SGu есть замыкание выпуклой оболочки множества $\{y \in L^q(\Omega) \mid \exists (u_n),\ u_n \to u$ в $C^1(\overline{\Omega}), Gu_n \rightharpoonup y$ в $L^q(\Omega)\}$. Если $\hat{G}$–оператор Немыцкого, порожденный $g(x, u(x))$ и действующий из $C(\overline{\Omega})$ в $L^q(\Omega)$, то $SGu \subset S\hat{G}u$. Известно [15], что $S\hat{G}u = \hat{G}^{\square}(u)$, где $\hat{G}^{\square}$– овыпукливание $\hat{G}$. Как показано в [1],

$$\hat{G}^{\square}u = \{z : \Omega \to \mathbb{R} \mid z(x) \text{ измерима на } \Omega,\ z(x) \in [g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))] \text{ п.в. на } \Omega\}.$$

Поэтому, если $z \in SG(u)$, $u \in C^1(\overline{\Omega})$, то $z(x) \in [g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))]$ п.в. на Ω. Отсюда следует, что для доказательства существование обобщенного решения $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ задачи (1)–(2) достаточно установить существование решения операторного включения $h - B_\nu u - \nu u \in SGu$. Так как оператор B_ν непрерывно обратим, то последнее эквивалентно

$$u \in B_\nu^{-1}(h - \nu u - SGu) = \phi_\nu(u). \tag{15}$$

Линейный оператор B_ν^{-1} отображающий $L^q(\Omega)$ в $C^1(\overline{\Omega})$ компактен, поскольку он ограничен, как оператор из $L^q(\Omega)$ в $W_q^2(\Omega)$, а $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $C^1(\overline{\Omega})$ для $q > m$. Из чего, учитывая ограниченность многозначного отображения SG на любом шаре в банаховом пространстве E функций из $C^1(\overline{\Omega})$, равных нулю на границе, а также выпуклость и замкнутость значений SG, получим, что значения отображения ϕ_ν – выпуклые компакты. Кроме того, для любого шара в E объединение множества значений ϕ_ν на этом шаре – предкомпактное множество в E. Не сложно показать [15], что ϕ_ν является полунепрерывным сверху на E. Обозначим $B_R = \{u \in E \mid \|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq R\}$, а $S_R = \partial B_R$. Отображение $\Phi_\nu(u) = u - \phi_\nu(u)$ будет компактным векторным полем из $C(S_R, B_R, 0)$ [16] , если $0 \notin \Phi_\nu(u)\ \forall u \in S_R$. Доказательство существования решения включения (15) будет проводиться топологическим методом. Для этого достаточно показать, что найдется шар B_R в E, для которого семейство отображений

$$H_\nu(t,u) = (1-t)u + t\Phi_\nu(u), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

является гомотопией в $C(S_R, B_R, 0)$, связывающей тождественное отображение I и компактное векторное поле $\Phi_\nu(u)$ (в данной ситуации это означает, что $0 \notin H_\nu(t,u)$ для любых $t \in [0,1]$ и $u \in S_R$). Действительно, тогда совпадают топологические степени отображений I и Φ_ν [16]: $deg(B_R, 0, \Phi_\nu) = deg(B_R, 0, I) = 1$. Отсюда [16] следует, что найдется $u \in E$, удовлетворяющее включению $0 \in \Phi_\nu(u)$, т.е. $u \in \phi_\nu(u)$. Таким образом, чтобы доказать существование обобщенного решения задачи (1)–(2) достаточно установить ограниченность множества всех решений включений $0 \in H_\nu(t,u)$ в E при $t \in [0,1]$. Для чего достаточно показать равномерную по $t \in [0,1]$ ограниченность в E решений из $D(B_\nu)$ включений

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + (1-t)\nu u(x) + th(x) \in t[g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))] \tag{16}$$

для почти всех $x \in \Omega$.

Замечание 5. Если для уравнения (1) выполнено сильное (A)–условие, то любое обобщенное решение задачи (1)–(2) является полуправильным решением.

Действительно, достаточно показать, что мера множества

$$\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega \mid g_+(x, u(x)) \neq g_-(x, u(x))\}$$

равна нулю, так как, если $x \in \Omega \setminus \tilde{\Omega}$, то $g_-(x, u(x)) = g_+(x, u(x)) = g(x, u(x))$, и, значит,

$$[g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] = \{g(x, u(x))\}.$$

Предположим, что $mes(\tilde{\Omega}) \neq 0$. Тогда из определения сильного (A)–условия следует существование $i \in I$ такого, что множество

$$\Omega^i = \{x \in \Omega \mid g_+(x, u(x)) \neq g_-(x, u(x)), \;\; u(x) = \psi_i(x)\}$$

имеет ненулевую меру. С другой стороны, из сильного (A) – условия имеем для $x \in \Omega^i$

$$\Big(L\psi_i(x) + g_+(x, \psi_i(x)) - h(x)\Big)\Big(L\psi_i(x) + g_-(x, \psi_i(x)) - h(x)\Big) > 0,$$

и, значит почти всюду на Ω^i

$$\Big(Au(x) - \lambda_1 u(x) + g_+(x, u(x)) - h(x)\Big)\Big(Au(x) - \lambda_1 u(x) + g_-(x, u(x)) - h(x)\Big) > 0$$

(из совпадения $u(x)$ и $\psi_i(x)$ на измеримом множестве Ω^i следует, что $Au = A\psi_i$ почти всюду на Ω^i [2]). Отсюда получаем, что для почти всех $x \in \Omega^i$

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \notin [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))],$$

а это противоречит определению обобщенного решения.

3. Доказательство основных результатов.

Приведем сначала общую часть доказательства теорем 1 и 2. Как показано выше, для доказательства теорем 1 и 2 достаточно установить существование $\rho > 0$ такого, что для любого $u \in D(B_\nu)$ удовлетворяющего включению (16) с некоторым $t \in [0, 1]$ верна оценка $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq \rho$ (при доказательстве теоремы 1 будем брать $\nu < 0$, а при доказательстве теоремы 2 будем брать $0 < \nu < \alpha = \lambda_2 - \lambda_1$).

Допустим противное. Тогда существуют последовательности $(t_k) \subset [0, 1]$, $(u_k) \subset W_q^2(\Omega)$ и $(z_k) \subset L^q(\Omega)$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$ верны следующие соотношения $\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \geq k$

$$z_k(x) \in [g_-(x, u_k(x)), g_+(x, u_k(x))] \text{ п.в. на } \Omega \tag{17}$$

$$Au_k(x) - \lambda_1 u_k(x) - (1 - t_k)\nu u_k(x) + t_k z_k(x) = t_k h(x), \tag{18}$$

$$u_k|_{\partial\Omega} = 0. \tag{19}$$

С помощью оператора B_ν, определенного в пункте 2, уравнение (18) запишем в виде

$$B_\nu u_k = t_k(-\nu u_k - z_k + h).$$

Поделим обе части этого равенства на $\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ и обозначим

$$v_k = \frac{u_k}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}},$$

тогда получим

$$B_\nu v_k = t_k\Big(-\nu v_k - \frac{z_k}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}} + \frac{h}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}}\Big) \tag{20}$$

Из оценки (iii) в условии $(\star)$ и включения (17) следует ограниченность последовательности $\big(z_k/\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}\big)$ в $L^q(\Omega)$. Далее, $\|v_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1$ и $h/\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to 0$ в $L^q(\Omega)$. Поэтому правая часть равенства (20) равномерно по k ограничена в $L^q(\Omega)$. Из чего с помощью оценок $W^2_q(\Omega)$– нормы решений эллиптических краевых задач [2] заключаем об ограниченности последовательности (v_k) в $W^2_q(\Omega)$. В силу рефлексивности пространства $W^2_q(\Omega)$ и включения $(t_k) \subset [0,1]$ можно считать (переходя, если необходимо к подпоследовательностям), что найдутся $v \in W^2_q(\Omega)$ и $t \in [0,1]$ такие, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W^2_q(\Omega)$ и $t_k \to t$. Так как $W^2_q(\Omega)$ компактно вложено в $C^1(\overline{\Omega})$, то $v_k \to v$ в $C^1(\overline{\Omega})$. Отсюда следует, что $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1$ и $v|_{\partial\Omega} = 0$. Заметим, что $t \neq 0$, так как в противном случае переходя к пределу в (20) получим $B_\nu v = 0$. Из чего в силу непрерывной обратимости B_ν заключаем, что $v = 0$. С другой стороны $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1$. Противоречие.

Так как $t \neq 0$, то найдутся $k_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $t_k > 0$ при $k > k_0$. Из (20) для $k > k_0$ имеем

$$\frac{z_k}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}} = -\nu v_k + \frac{h}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}} - \frac{1}{t_k} B_\nu v_k. \tag{21}$$

С учетом, что $B_\nu v_k \rightharpoonup B_\nu v$ в $L^q(\Omega)$ (поскольку $v_k \rightharpoonup v$ в $W^2_q(\Omega)$), из (21) получим, что $z_k/\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \rightharpoonup K(x)$ в $L^q(\Omega)$ и

$$B_\nu v = t(-\nu v - K(x)). \tag{22}$$

Введем новую функцию $k_v(x)$ на Ω следующим образом

$$k_v(x) = \begin{cases} \frac{K(x)}{v(x)}, & \text{если } v(x) \neq 0 \\ 0, & \text{если } v(x) = 0. \end{cases}$$

Покажем, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{z_k(x)}{u_k(x)} \rightharpoonup k_v(x) \text{ в } L^q(\Omega_\varepsilon),$$

где $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |v(x)| > \varepsilon\}$. Действительно, для произвольной $\psi \in L^p(\Omega_\varepsilon)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ имеем

$$\Big|\int_{\Omega_\varepsilon} \Big(\frac{z_k(x)}{u_k(x)} - k_v(x)\Big)\psi(x)dx\Big| = \tag{23}$$

$$= \Big|\int_{\Omega_\varepsilon} \psi(x)\Big(\frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}\cdot v_k} - \frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}\cdot v} + \frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}\cdot v} - \frac{K(x)}{v(x)}\Big)dx\Big| \leq$$

$$\leq \Big|\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}}\Big(\psi\frac{(v - v_k)}{v_k\cdot v}\Big)dx\Big| + \Big|\int_{\Omega_\varepsilon}\Big(\frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}} - K(x)\Big)\frac{\psi(x)}{v(x)}dx\Big| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{z_k}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}} \right\|_{L^q(\Omega_\varepsilon)} \cdot \left\| \psi \frac{v - v_k}{v_k v} \right\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \eta_k,$$

где

$$\eta_k = \Big| \int_{\Omega_\varepsilon} \Big(\frac{z_k(x)}{\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}} - K(x) \Big) \frac{\psi(x)}{v(x)} dx \Big| \to 0 \text{ при } k \to \infty,$$

поскольку $\psi/v \in L^p(\Omega_\varepsilon)$ и $z_k/\|u_k\| \rightharpoonup K(x)$ в $L^q(\Omega)$. Отсюда следует, что правая часть неравенства (23) стремится к нулю при $k \to \infty$, так как последовательность $z_k/\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})}$ ограничена в $L^q(\Omega)$, а

$$\psi \frac{v - v_k}{v v_k} \to 0 \text{ в } L^p(\Omega_\varepsilon) \text{ при } k \to \infty.$$

На этом общая часть доказательства теорем 1 и 2 заканчивается.

Продолжим *доказательство теоремы 1.* Пусть выполнено условие 2) теоремы 1. Тогда в силу замечания 3

$$\lim_{\xi \to \pm\infty} \sup \frac{g(x, \xi)}{\xi} \leq C_1, \tag{24}$$

где C_1 постоянная в оценке (iii) условия $(\star)$. Покажем, что $0 \leq k_v(x) \leq C_1$ почти всюду на Ω. Заметим, что $\{x \in \Omega \mid v(x) \neq 0\} = \cup_{\varepsilon > 0} \Omega_\varepsilon$. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Для любой неотрицательной на Ω_ε функции $\psi \in L^p(\Omega_\varepsilon)$ имеем

$$\int_{\Omega_\varepsilon} k_v(x)\psi(x)dx = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{z_k(x)}{u_k(x)} \psi(x)dx \geq \int_{\Omega_\varepsilon} \lim_{k \to \infty} \inf \frac{z_k(x)}{u_k(x)} \psi(x)dx \geq 0.$$

(Воспользовались слабой сходимостью z_k/u_k к $k_v(x)$ в $L^q(\Omega_\varepsilon)$, условием 2) теоремы 1 и леммой Лебега – Фату о переходе к пределу под знак интеграла [17]). Из чего заключаем о неотрицательности $k_v(x)$ п.в. на Ω_ε. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует неотрицательность $k_v(x)$ почти всюду на Ω. Аналогично, для любой неотрицательной на Ω_ε функции $\psi \in L^p(\Omega_\varepsilon)$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} k_v(x)\psi(x)dx = \lim_{k \to \infty} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{z_k(x)}{u_k(x)} \psi(x)dx \leq$$

$$\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \lim_{k \to \infty} \sup \frac{z_k(x)}{u_k(x)} \psi(x)dx \leq \int_{\Omega_\varepsilon} C_1 \psi(x)dx.$$

(Последнее неравенство – следствие (24).) Отсюда получаем, что $k_v(x) \leq C_1$ почти всюду на Ω. Перепишем уравнение (22) в следующем виде

$$Av - \lambda_1 v - (1-t)\nu v + t k_v(x)v(x) = 0, \;\; 0 < t \leq 1.$$

Умножим обе части последнего равенства на $v(x)$ и проинтегрируем по Ω, получим

$$0 = \int_\Omega (Av - \lambda_1 v)v(x)dx - \nu(1-t) \int_\Omega v^2(x)dx + t \int_\Omega k_v(x)v^2(x)dx \tag{25}$$

Первое слагаемое в правой части (25) неотрицательное, так как λ_1 – минимальное собственное значение оператора A с граничным условием (2). Поскольку $\nu < 0$, $t \in (0, 1]$, то $-\nu(1-t)\int_\Omega v^2(x)dx \geq 0$. Последнее слагаемое в (25) неотрицательно в силу неотрицательности $k_v(x)$. Поэтому каждое из рассмотренных слагаемых равно 0. Так как

$\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1$, то второе слагаемое обращается в нуль только при $t = 1$. Из равенства нулю последнего слагаемого в правой части (25) следует, что $k_v(x) \cdot v(x) = 0$. Следовательно, уравнение (22) примет вид $Av - \lambda_1 v = 0$ и, значит, v– собственная функция оператора A с граничным условием (2), соответствующая λ_1. Поэтому $v = M\varphi$, где $M \neq 0$, а φ – функция из замечания 1. Пусть для определенности $M > 0$, тогда $v(x) > 0$ в Ω и $\partial v/\partial n < 0$ на $\partial\Omega$ ($n(x)$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$)[2]. Отсюда следует существование $k_0 \in \mathbb{N}$ такого, что для $k > k_0$ функции $v_k(x) > 0$ на Ω. Поскольку $u_k(x) = \|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \cdot v_k(x)$, то последнее влечет справедливость неравенства $u_k(x) > 0$ на Ω для любого $k > k_0$. Функция u_k является решением задачи (18)–(19). Заметим, что если найдется $t_k = 1$, то

$$Au_k - \lambda_1 u_k + z_k(x) = h(x), \quad u_k|_{\partial\Omega} = 0,$$

то есть u_k – обобщенное решение задачи (1)–(2), и в этом случае теорему 1 можно считать доказанной. Поэтому будем предполагать, что $0 < t_k < 1$ при $k > k_1$, где $k_1 > k_0$. При $k > k_1$ умножим обе части равенства (18) на v и проинтегрируем по Ω. Учитывая, что $\int_\Omega (Au_k - \lambda_1 u_k)v(x)dx = 0$, получим

$$t_k \int_\Omega z_k(x)v(x)dx = t_k \int_\Omega h(x)v(x)dx + (1 - t_k)\nu\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \int_\Omega v_k(x)v(x)dx.$$

Так как, $\nu < 0$, а $\int_\Omega v_k(x)v(x)dx \to \int_\Omega v^2(x)dx > 0$, то для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_\Omega z_k(x)v(x)dx < \int_\Omega h(x)v(x)dx. \tag{26}$$

Из определения функции $z_k(x)$ следует, что для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $z_k(x) \geq g_-(x, u_k(x))$. Пусть $\Omega_1 = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < r_1\}$ – множество из условия (gh1). Имеем для произвольного $k > k_1$

$$\int_{\Omega_1} z_k(x)v(x)dx \geq \int_{\Omega_1} g_-(x, u_k(x))v(x)dx \geq \int_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)v(x)dx, \tag{27}$$

так как $u_k(x) > 0$ в Ω и

$$g_-(x, u_k(x)) = \lim_{\eta\to u_k(x)} \inf g(x,\eta) \geq \inf_{\xi>0} g(x,\xi).$$

Рассмотрим множество $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$ и пусть $r_2 \geq 0$ – постоянная в условии (gh1). Так как $u_k(x) = \|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} v_k(x) \to +\infty$ равномерно на Ω_2 ($\inf_{\Omega_2} v(x) > 0$), то найдется $k_2 > k_1$ такое, что $u_k(x) > r_2$ на Ω_2 при всех $k > k_2$.

Тогда для Ω_2 при $k > k_2$ получаем

$$\int_{\Omega_2} z_k(x)v(x)dx \geq \int_{\Omega_2} g_-(x, u_k(x))v(x)dx \geq \int_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)v(x)dx. \tag{28}$$

Следовательно, для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ из (27),(28) и условия (gh1) имеем

$$\int_\Omega z_k(x)v(x)dx \geq \int\limits_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)v(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)v(x)dx \geq \int_\Omega hv dx.$$

Получено противоречие с (26).

Случай, когда $v(x) = M\varphi(x)$ и $M < 0$ рассматривается аналогично с использованием левого неравенства в условии (gh1) вместо правого и неравенства $z_k(x) \le g_+(x, u_k(x))$. На этом *доказательство теоремы 1 завершается.*

Перейдем к *доказательству теоремы 2.* Пусть выполнены условия 1) и 2) этой теоремы. Таким же образом, как и при доказательстве теоремы 1 устанавливается справедливость неравенств

$$-\Gamma_+(x) \le k_v(x) \le 0, \text{ если } v(x) > 0; \tag{29}$$

$$-\Gamma_-(x) \le k_v(x) \le 0, \text{ если } v(x) < 0 \tag{30}$$

для почти всех $x \in \Omega$. Определим на Ω функции $k_v^+(x)$ и $k_v^-(x)$ равенствами

$$k_v^+(x) = \begin{cases} k_v(x), & \text{если } v(x) > 0 \\ 0, & \text{в остальных точках } \Omega, \end{cases}$$

$$k_v^-(x) = \begin{cases} k_v(x), & \text{если } v(x) < 0 \\ 0, & \text{в остальных точках } \Omega. \end{cases}$$

Тогда $k_v(x)v(x) = k_v^+(x)v^+(x) - k_v^-(x)v^-(x)$, где $v^+(x) = \max\{v(x), 0\}$, а $v^-(x) = \max\{-v(x), 0\}$ и уравнение (22) можно переписать в виде

$$Av - \lambda_1 v + p_+(x)v^+(x) - p_-(x)v^-(x) = 0, \ x \in \Omega, \ v|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $p_+(x) = (t-1)\nu + tk_v^+(x)$, $p_-(x) = (t-1)\nu + tk_v^-(x)$. Заметим, что $p_\pm(x) \le 0$ почти всюду на Ω, так как $\nu > 0$, $0 < t \le 1$, а функции $k_v^+(x)$, $k_v^-(x)$ неположительны для почти всех $x \in \Omega$. Для каждого $0 < \varepsilon < \alpha/2$ определим функции $\gamma_\pm^\varepsilon$ на Ω равенствами

$$\gamma_+^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Gamma_+(x) \ge \frac{\alpha}{2} \\ \varepsilon, & \text{если } \Gamma_+(x) < \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

$$\gamma_-^\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \Gamma_-(x) \ge \frac{\alpha}{2} \\ \varepsilon, & \text{если } \Gamma_-(x) < \frac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

Из условия 2) теоремы 2 следует, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\Big(\int_{w>0}(\alpha - \Gamma_+(x) - \gamma_+^\varepsilon(x))w^2(x)dx + \int_{w<0}(\alpha - \Gamma_-(x) - \gamma_-^\varepsilon(x))w^2(x)dx\Big) =$$

$$= \int_{w>0}(\alpha - \Gamma_+(x))w^2(x)dx + \int_{w<0}(\alpha - \Gamma_-(x))w^2(x)dx > 0.$$

Из чего заключаем о существовании $\varepsilon_0 \in (0, \alpha/2)$ такого, что

$$\int_{w>0}(\alpha - \Gamma_+(x) - \gamma_+^{\varepsilon_0}(x))w^2(x)dx + \int_{w<0}(\alpha - \Gamma_-(x) - \gamma_-^{\varepsilon_0}(x))w^2(x)dx > 0$$

Положим $\tilde{\Gamma}_+(x) = \Gamma_+(x) + \gamma_+^{\varepsilon_0}(x)$, $\tilde{\Gamma}_-(x) = \Gamma_-(x) + \gamma_-^{\varepsilon_0}(x)$. Тогда $\varepsilon_0 < \tilde{\Gamma}_\pm(x) \leq \alpha = \lambda_2 - \lambda_1$ на Ω. Не теряя общности, можно считать $0 < \nu < \varepsilon_0$. Следовательно,

$$0 \geq p_+(x) = (t-1)\nu + tk_v^+(x) \geq (t-1)\tilde{\Gamma}_+(x) - t\tilde{\Gamma}_+(x) = -\tilde{\Gamma}_+(x),$$

$$0 \geq p_-(x) = (t-1)\nu + tk_v^-(x) \geq (t-1)\tilde{\Gamma}_-(x) - t\tilde{\Gamma}_-(x) = -\tilde{\Gamma}_-(x),$$

почти всюду на Ω. Выполнены все условия леммы 1 из [14], поэтому $Av - \lambda_1 v = 0$. Так как $\|v\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1$, то $v(x) = M\varphi(x)$, где $M \neq 0$. Пусть для определенности $M > 0$, тогда $v(x) > 0$ в Ω, а $\partial v/\partial n < 0$ на $\partial\Omega$. Отсюда и сходимости v_k к v в $C^1(\overline{\Omega})$ следует существование k_0 такого, что для любого $k > k_0$ верно неравенство $v_k(x) > 0$ на Ω, и, значит, при $k > k_0$ функция $u_k(x) = \|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} v_k(x)$ положительна на Ω. Заметим, что если бы для некоторого $k \in \mathbb{N}$ в уравнении (18) $t_k = 1$, то соответствующая функция $u_k(x)$ была бы решением задачи (1)–(2) и в этом случае теорему 2 можно считать доказанной. Поэтому будем считать, что $t_k \in (0,1)$. Умножим обе части равенства (18) на $v(x)$ и проинтегрируем по Ω, в результате получим

$$t_k \int_\Omega z_k(x)v(x)dx = t_k \int_\Omega h(x)v(x)dx + (1-t_k)\nu\|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} \int_\Omega v_k(x)v(x)dx.$$

Отсюда, учитывая, что $\nu > 0$, а $\int_\Omega v_k(x)v(x)dx \to \int_\Omega v^2(x)dx$, следует существование $k_1 > k_0$ такого, что для любого $k > k_1$ верно неравенство

$$\int_\Omega z_k(x)v(x)dx > \int_\Omega h(x)v(x)dx. \tag{31}$$

Из определения функции $z_k(x)$ следует, что для почти всех $x \in \Omega$ верно неравенство $z_k(x) \leq g_+(x, u_k(x))$. Следовательно, для произвольного $k > k_1$

$$\int_{\Omega_1} z_k(x)v(x)dx \leq \int_{\Omega_1} g_+(x, u_k(x))v(x)dx \leq \int_{\Omega_1} \sup_{\xi>0} g(x,\xi)v(x)dx, \tag{32}$$

так как при $k > k_1$ функция $u_k(x) > 0$ в Ω и

$$g_+(x, u_k(x)) = \lim_{\eta \to u_k(x)} \sup g(x,\eta) \leq \sup_{\xi>0} g(x,\xi).$$

Рассмотрим множество $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$. Поскольку $u_k(x) = \|u_k\|_{C^1(\overline{\Omega})} v_k(x) \to +\infty$ на Ω и Ω_2– компакт, то найдется номер k_2 такой, что $u_k(x) > r_2$ на Ω_2 при всех $k > k_2$.

Тогда для Ω_2 при $k > k_2$ получаем

$$\int_{\Omega_2} z_k(x)v(x)dx \leq \int_{\Omega_2} g_+(x, u_k(x))v(x)dx \leq \int_{\Omega_2} \sup_{\xi>r_2} g(x,\xi)v(x)dx. \tag{33}$$

Отсюда для достаточно больших $k \in \mathbb{N}$ из (32),(33) и условия (gh2) заключаем, что для любого $k > k_2$

$$\int_\Omega z_k(x)v(x)dx \leq \int\limits_{\Omega_1} \sup_{\xi>0} g(x,\xi)v(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \sup_{\xi>r_2} g(x,\xi)v(x)dx \leq \int\limits_\Omega hvdx.$$

Получено противоречие с (31).

Случай, когда $v(x) = M\varphi(x)$ и $M < 0$ рассматривается аналогично с использованием правого неравенства в условии (gh2) вместо левого и неравенства $z_k(x) \geq g_-(x, u_k(x))$. На этом *доказательство теоремы 2 завершается.*

1. *Красносельский М.А., Покровский А.В.* Системы с гистерезисом. // М.:Наука.- 1983.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка // М.:Наука.- 1989.- 496с.
3. *Berestycki H., de. Figueiredo D. G.* Double resonance in semilinear elliptic problems. //Comm. Part. Diff. Eq.- v. 6.- 1981.- p. 91–120.
4. *Dancer E.N.* On the Dirichlet problem for weakly nonlinear partial differential equations // Proc. Royal. Soc. Edinburgh.- v. 76.- 1977.- p. 283–300.
5. *Mawhin J.* Nonresonance conditions of nonuniform type in nonlinear boundary value problems // Dynamical Systems II.- (Bednarek and Cesari, eds.).- Academic Press.- New York.- 1982.- p. 255–275.
6. *Gossez J.-P., Omari P.* Non-ordered lower and upper solutions in semilinear elliptic problems // Comm. in partial diff. eq.-v. 19.- no. 7-8.- 1994.- p. 1163-1184.
7. *Landesman E., Lazer A.* Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance // J.Math. and Mech.- 1970.- v. 19.- no. 7. -p. 609–623.
8. *Iannacci R., Nkashama M.N.* Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance // Nonl. Anal. TMA.- v. 25.- 1995.- no. 5.- p. 455–471.
9. *Basile N. Mininni M.* Some solvability results for elliptic boundary value problems in resonance at the first eigenvalue with discontinuous nonlinearities // Boll.Un.Math.Ital.- 1980.- v. 17-B.,no. 3.-p. 1023–1033.
10. *Massabo I.* Elliptic boundary value problems at resonance with discontinuous nonlinearities // Boll. Un. Math. Ital.- Ser. 5.- 1980.- v. 17-B.- no. 3.- p. 1302–1320.
11. *Chang K.-C.* Variational methods for nondifferentiable function and their applications to partial differential equations // J.Math.Anal. and Appl.- 1981.-v. 80.- no. 1.- p. 102–129.
12. *Павленко В.Н., Винокур В.В.* Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывной нелинейностью // Известия вузов. Математика.- 2001.- no. 5.- с. 43–58.
13. *Павленко В.Н., Винокур В.В.* Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами // Укр. матем. журн.- 2002.- т. 54.- no. 3.- с. 349–363.
14. *Iannacci R., NkashamaM.N., Ward J.R.* Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance // Transaction of the Am. Math. Soc.- v. 311.- 1989.- no. 2.- p. 711–726.
15. *Павленко В.Н.* Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн.- 1994.- т. 46.- no. 6.- с. 729–736.
16. *Ma T.W.* Topological degree for set valued compact vector fields in locally convex spaces //Rozprawy Mat.- 1972.- v. 92.- p. 3–47.
17. *Иосида К.* Функциональный анализ // М.: Мир.- 1967.

Челябинский Государственный унивверситет,
ул. Братьев Кашириных, 129
454021, г.Челябинск, Россия
pavlenko@csu.ru
ekaterina@csu.ru

Получено 29.07.2004